ELSEVIER

BULLETIN DES SCIENCES

www.elsevier.com/locate/bulsci

Cellules quantiques symplectiques et fonctions de Husimi–Wigner

Maurice de Gosson

Blekinge Institute of Technology, 371 79 Karlskrona, Suède

Reçu le 27 mai 2004 ; accepté le 26 juin 2004

Disponible sur Internet le 20 octobre 2004

Résumé

Nous proposons une définition invariante par transformations symplectiques de la notion de cellule quantique dans l'espace de phase. Nous appliquons cette notion à l'étude de la positivité des fonctions de Wigner et de Husimi, ce qui nous permet de préciser et d'améliorer des résultats connus.

Abstract

We propose a definition of quantum cells which is invariant under symplectic transformations. We use this notion to the study of positivity properties of the Wigner and Husimi functions, which allows us to precise and to improve known results.

Mots-clés : Capacité symplectique ; Cellule quantique ; Wigner ; Husimi ; gaussienne

Keywords: Symplectique capacity; Quantum cell; Wigner; Husimi; Gaussian

1. Introduction

Une variante de la mécanique quantique très prisée par les physiciens est le formalisme WWM (pour Weyl–Wigner–Moyal). Un des objets mathématiques essentiels intervenant

Adresse e-mail : maurice.de-gosson@laposte.net (M. de Gosson).

0007-4497/$ – see front matter
doi:10.1016/j.bulsci.2004.06.003

dans cette théorie est la transformation de Wigner, qui associe à toute fonction $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n_x)$ la fonction $W\Psi$ définie par

$$W\Psi(z) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}py\right)\Psi\left(x+\frac{1}{2}y\right)\overline{\Psi}\left(x-\frac{1}{2}y\right)d^n y \tag{1}$$

où $z=(x,p)$ et $\hbar = h/2\pi$ (h est la constante de Planck). La transformée $W\Psi$ est réelle, et si $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^n_x)\cap L^2(\mathbb{R}^n_x)$ alors

$$\int W\Psi(z)\,d^n p = \left|\Psi(x)\right|^2 \quad \text{et} \quad \int W\Psi(z)\,d^n x = \left|\widehat{\Psi}(p)\right|^2$$

où $\widehat{\Psi}$ est la transformée de Fourier ‹‹ quantique ›› définie par

$$\widehat{\Psi}(p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n/2} \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar}px\right)\Psi(x)\,d^n x. \tag{2}$$

Lorsque $\|\Psi\|_{L^2}=1$ (et donc $\|\widehat{\Psi}\|_{L^2}=1$) la fonction $W\Psi$ semble donc pouvoir jouer le rôle d'une densité de probabilité jointe. Or elle n'est généralement pas positive. Hudson [11] (voir aussi Folland [4]) a montré qu'en fait $W\Psi \geqslant 0$ si et seulement si Ψ est une exponentielle du type

$$\Psi(x) = \exp(Ax^2 + bx + c)$$

où $A \in GL(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Re}(A) > 0$ et $b \in \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}$. La transformée de Wigner est toutefois toujours positive ‹‹ en moyenne ›› dans le sens suivant : soient α, β deux nombres strictement positifs, et posons

$$\Phi_{\alpha\beta}(x,p) = \left(\frac{1}{2\pi\alpha\beta}\right)^n \exp\left[-\left(\frac{|x|^2}{2\alpha^2}+\frac{|p|^2}{2\beta^2}\right)\right].$$

On associe à cette Gausienne la fonction de Husimi [10], $W_{\alpha\beta}$, définie par

$$W_{\alpha\beta}\Psi = W\Psi * \Phi_{\alpha\beta}\ ; \tag{3}$$

cette fonction a la propriété de positivité suivante (de Bruijn [6]) :

$$\alpha\beta \geqslant \frac{1}{2}\hbar \quad \Longrightarrow \quad W_{\alpha\beta} \geqslant 0\ ; \tag{4}$$

ce résultat se montre aisèment en utilisant l'inégalité

$$W\Psi * W\Phi \geqslant 0 \tag{5}$$

(voir par exemple, Folland [4]). Notons toutefois que la convolée $W\Psi * W\Phi$ (ou, plus généralement, $W_{\alpha\beta}$) n'a aucune raison, en général, d'être la transformée de Wigner d'une fonction : nous reviendrons sur ce point plus loin.

Le nombre $W_{\alpha\beta}\Psi(x,p)$ peut être interprété comme (très approximativement) la moyenne de $W\Psi$ évaluée sur une ellipsoïde centrée en (x,p) et dont les projections sur les plans conjugués x_j, p_j ont une aire $\geqslant \frac{1}{2}h$; ce fait conduit les physiciens à interpréter la fonction de Husimi comme une moyennisation de la fonction de Wigner calculée sur ce que les Anglo-Saxons appellent un ‹‹ coarse graining ›› de l'espace de phase en ‹‹ cellules ›› cubiques de volume h^n. Cette notion de cellule, très populaire en thermodynamique et en mécanique statistique, pose toutefois davantage de problèmes qu'elle n'en résout ; elle n'a en particulier aucune propriété d'invariance sous des transformations symplectiques, et n'est donc (au mieux) qu'un instrument heuristique.

Nous nous proposons dans cet article de donner une définition mathématiquement correcte et invariante par transformations symplectiques, de la notion de cellule quantique, et d'appliquer cette définition à l'étude fine de la positivité de la fonction de Husimi. (Nous avons introduit une notion plus générale de cellule quantique adaptée à l'étude des systèmes hamiltoniens intégrables dand [7].)

Notations et rappels. Nous utiliserons les notations suivantes : σ est la forme symplectique standard sur l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}_z = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$, elle est définie par

$$\sigma(z, z') = px' - p'x = \sum_{j=1}^{n} p_j x'_j - p'_j x_j$$

c'est à dire

$$\sigma(z, z') = (z')^T Jz, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne habituelle de $\mathbb{R}^{2n}_z$; elle est associée au produit scalaire $(z, z') \longmapsto zz' = \sigma(z, Jz')$. Le groupe symplectique associé est $\mathrm{Sp}(n)$ et on identifie le groupe unitaire complexe $U(n, \mathbb{C})$ avec le sous-groupe $U(n) = \mathrm{Sp}(n) \cap O(2n)$ des ‹‹ rotations symplectiques ›› par le monomorphisme

$$A + iB \longmapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Nous noterons $\mathrm{ISp}(n)$ le groupe symplectique affine : $S_\tau \in \mathrm{ISp}(n)$ si et seulement $S_\tau = S \circ \tau$ (ou $S = \tau \circ S$) où $S \in \mathrm{Sp}(n)$ et τ est une translation $\tau : z \longmapsto z + z_0$.

Soit M une matrice réelle d'ordre m quelconque ; nous écrirons $M > 0$ (resp. $M \geqslant 0$) lorsqu'elle est symétrique et définie positive (respectivement semi-définie positive). Si deux matrices M et M' ont les mêmes valeurs propres nous écrirons $M \simeq M'$; on a bien sûr $MM' \simeq M'M$. Enfin, si $M - M' \geqslant 0$ nous écrirons $M' \leqslant M$ (ou $M \geqslant M'$).

On rappelle enfin un théorème classique de Williamson [14], dont Folland [4, Prop. 4.22, p. 177], donne une démonstration ‹‹ moderne ››, et que l'on trouve sous des formes diverses dans la litérature (Hofer et Zehnder [9] en attribuent d'ailleurs la paternité à Weierstrass) :

Théorème de Williamson. *Soit une matrice symétrique M définie positive, d'ordre $2n$. Alors il existe $S \in \mathrm{Sp}(n)$ telle que $M = S^T DS$ où D est la matrice diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}, \quad \Omega = \mathrm{diag}[\mu_1, \ldots, \mu_n] \; ; \tag{6}$$

les nombres $\pm i\mu_j$ $(\mu_j > 0)$ sont les valeurs propres de JM.

2. Cellules quantiques

Les candidats les plus simples au statut de ‹‹ cellules quantiques ›› sont les boules $B(z_0, \sqrt{\hbar})$: $|z - z_0| = \sqrt{\hbar}$: tout plan passant par le centre d'une telle boule la coupe suivant un disque d'aire $\pi(\sqrt{\hbar})^2 = \frac{1}{2}h$ (rappellons que $\hbar = h/2\pi$). Une telle cellule centrée en $z_0 = 0$ est invariante par rotation (donc en particulier sous l'action de $U(n)$), mais pas sous l'action du groupe $\mathrm{Sp}(n)$. Ceci suggère d'appeller, plus généralement, ‹‹ cellule quantique ›› l'image d'une boule de rayon $\sqrt{\hbar}$ par un élément $S_\tau \in \mathrm{Sp}(n)$:

Définition 1. Une cellule quantique est tout ensemble $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{2n}_z$ pour lequel il existe $S_\tau \in \mathrm{ISp}(n)$ tel que $\mathcal{B} = S_\tau(B\sqrt{\hbar}))$ où $B(\sqrt{\hbar}) = B(0, \sqrt{\hbar})$; de manière équivalente : il existe $S \in \mathrm{Sp}(n)$ et $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}_z$ tels que $\mathcal{B} = S(B(z_0, \sqrt{\hbar}))$.

Bien entendu :

Un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2n}_z$ est une cellule quantique si et seulement si $S_\tau(\mathcal{B})$ en est une pour chaque $S_\tau \in \mathrm{ISp}(n)$.

On notera que le volume d'une cellule quantique est

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vol}\big(B(\sqrt{\hbar})\big) = \frac{1}{n!2^n}h^n \ ;$$

il est donc très différent de celui des cellules cubiques des physiciens. Une autre différence importante est la suivante est que les cellules quantiques peuvent avoir une extension arbitrairement grande dans $\mathbb{R}^{2n}_z$: pour toute boule de $\mathbb{R}^{2n}_z$ il existe une cellule quantique non contenue dans cette boule.

Les cellules quantiques ainsi définies possèdent une propriété remarquable :

L'intersection d'une cellule quantique $\mathcal{B}$ avec tout plan passant par son centre et parallèle à un plan symplectique est une ellipse d'aire égale à $\frac{1}{2}h$.

Rappellons qu'n plan symplectique set un sous espace vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^{2n}_z$ de dimension deux et possédant une base symplectique $\{e, f\}$: $\sigma(f, e) = 1$. L'image d'un plan symplectique par $S \in \mathrm{Sp}(n)$ est encore un plan symplectique. La restriction de $S \in \mathrm{Sp}(n)$ à un plan symplectique $\mathcal{P}$ est une transformation symplectique $S_{|\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow S_{|\mathcal{P}}(\mathcal{P})$; elle a pour déterminant un, et conserve donc les aires des surfaces de $\mathcal{P}$.

Plus généralement, un *plan symplectique affine* tout plan de $\mathbb{R}^{2n}_z$ parallèle à un plan symplectique. L'image d'un plan affine symplectique par $S_\tau \in \mathrm{ISp}(n)$ est encore un plan affine symplectique.

La propriété énoncée ci-haut est en fait *caractéristique* des cellules quantiques :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{B}$ une ellipsoïde de $\mathbb{R}^{2n}_z$. Les deux propriétés* (A) *et* (B) *suivantes sont équivalentes* : (A) *$\mathcal{B}$ est une cellule quantique*; (B) *l'intersection de $\mathcal{B}$ par tout plan symplectique affine passant par son centre est une ellipse d'aire $\frac{1}{2}h$.*

Démonstration. Il suffit évidemement de considérer le cas où l'ellipsoïde $\mathcal{B}$ est centrée en $z_0 = 0$. Montrons (*A*) $\Longrightarrow$ (*B*). Soit une cellule quantique $\mathcal{B}$; il existe donc $S \in \mathrm{Sp}(n)$ tel que $\mathcal{B} = S(B(\sqrt{\hbar}))$. Coupons $\mathcal{B}$ par un plan symplectique $\mathcal{P}$; alors $S^{-1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{P})$ est un disque $\mathcal{D}$ bordé par un grand cercle de $B(\sqrt{\hbar})$; ce disque a donc pour aire $\frac{1}{2}h$. Or, la restriction de S^{-1} à $\mathcal{P}$ est symplectique, et $S^{-1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{P})$ a donc la même aire $\frac{1}{2}h$ que $\mathcal{D}$. Montrons que réciproquement (*B*) $\Longrightarrow$ (*A*). Supposons que l'aire de $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}$ soit $\frac{1}{2}h$ pour tout plan symplectique $\mathcal{P}$. Puisque $S(\mathcal{B} \cap \mathcal{P}) = \mathcal{S}(\mathcal{B}) \cap S(\mathcal{P})$ et que $\mathrm{Sp}(n)$ agit transitivement sur l'ensemble des plans symplectiques on en déduit que l'aire de $S(\mathcal{B}) \cap \mathcal{P}$ est égale à $\frac{1}{2}h$ pour toute $S \in \mathrm{Sp}(n)$. Soit alors $M > 0$ tel que $\mathcal{B} : z^T M z \leqslant \hbar$; vu le théorème de Williamson il existe $S \in \mathrm{Sp}(n)$ tel que $M = S^T D S$, D une matrice diagonale du type (6). Par conséquent $S^{-1}(\mathcal{B})$ est définie par l'inégalité $z^T D z \leqslant \hbar$, c'est à dire

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j (x_j^2 + p_j^2) \leqslant \hbar.$$

Pour chaque $j = 1, \ldots, n$ l'intersection de $S^{-1}(\mathcal{B})$ par le plan symplectique $\mathcal{P}_j = \{z\colon z_k = 0; k \neq j\}$ est le disque $\mu_j (x_j^2 + p_j^2) \leqslant \hbar$, d'aire $h/2\mu_j$; puisque cette aire est par ailleurs égale à $\frac{1}{2}h$ on doit avoir $\mu_j = 1$ pour tout j, et $S^{-1}(\mathcal{B})$ est donc la boule $B(\sqrt{\hbar})$, ce qui achève la démonstration. □

Observons que l'on peut munir l'ensemble $\mathrm{Quant}(n)$ des cellules quantiques d'une topologie très simple : une cellule quantique $\mathcal{B} = S(B(\sqrt{\hbar}))$ centrée en $z_0 = 0$ est représentée par l'inégalité

$$z^T G z \leqslant \hbar, \quad G = (S S^T)^{-1}$$

donc il y a bijection entre l'ensemble de telles cellules et la variété des matrices symplectiques symétriques définies positives. Cette variété est contractible et s'identifie par le théorème de décomposition polaire à $\mathrm{Sp}(n)/U(n)$, et a donc pour dimension

$$\dim\bigl(\mathrm{Sp}(n)/U(n)\bigr) = n(n+1).$$

Puisqu'une cellule quantique arbitraire s'obtient par translation d'une cellule centrée en 0 on a l'identification

$$\mathrm{Quant}(n) \equiv \mathbb{R}^{n(n+1)} \times \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^{n(n+3)}.$$

La variété $\mathrm{Quant}(n)$ est donc en particulier contractible.

Le résultat suivant, que nous utiliserons dans la Section 4 montre que les cellules quantiques peuvent toutes êtres obtenues en faisant agir un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(n)$ sur les boules de rayon $\sqrt{\hbar}$:

Lemme 1. *Toute cellule quantique $\mathcal{B}$ est l'image d'une boule $B(z_0, \sqrt{\hbar})$ par un élément de la composante connexe du groupe de stabilité du plan symplectique $0 \times \mathbb{R}^n_p$ dans $\mathrm{Sp}(n)$, c'est à dire $\mathcal{B} = S_0(B(z_0, \sqrt{\hbar}))$ où $S_0 \in \mathrm{Sp}(n)$ est du type*

$$S_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix}, \quad P = P^T,\ L > 0.$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $z_0 = 0$. On vérifie immédiatement qu'une matrice symplectique quelconqueqa

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

s'écrit

$$S = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & A_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 & -Y_0 \\ Y_0 & X_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

où A_0, C_0 et $X + iY \in U(n, \mathbb{C})$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} A_0 &= (AA^T + BB^T)^{1/2}, \\ C_0 &= (CA^T + DB^T)(AA^T + BB^T)^{-1/2}, \\ X_0 + iY_0 &= (AA^T + BB^T)^{-1/2}(A - iB). \end{aligned}$$

Montrons que

$$U = \begin{bmatrix} X_0 & -Y_0 \\ Y_0 & X_0 \end{bmatrix} \in U(n)\ ;$$

le lemme en résultera puisqu'alors

$$S_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ C_0 & A_0^{-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n)$$

et $U(B(\sqrt{\hbar})) = B(\sqrt{\hbar})$. On a

$$(X_0 + iY_0)(X_0 + iY_0)^* = X_0X_0^T + Y_0Y_0^T + i(Y_0X_0^T - X_0Y_0^T)\ ;$$

or, vu la définition de X_0, Y_0 et A_0, on a $X_0X_0^T + Y_0Y_0^T = I$ et $Y_0X_0^T = X_0Y_0^T$ donc $X_0 + iY_0 \in U(n, \mathbb{C})$ et $U \in U(n)$ comme annoncé. □

Le lien entre les cellules quantiques et la mécanique statistique peut se faire de la manière suivante : à $\mathcal{B} = S(B(\sqrt{\hbar}))$ associons

$$\Sigma_{\mathcal{B}} = \frac{\hbar}{2} SS^T \tag{8}$$

que l'on interprètera comme une matrice de covariance statistique (voir Arvind et al. [2], Littlejohn [12]). Les valeurs propres de $JSS^T \simeq S^TJS = J$ sont $\pm i$, donc celles de $J\Sigma_{\mathcal{B}}$ sont $\pm i\hbar/2$. Ceci est une forme du principe d'incertitude de la mécanique quantique ; par exemple dans le cas $n = 1$ la matrice de covariance est

$$\Sigma_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (\Delta x)^2 & \Delta(x, p) \\ \Delta(x, p) & (\Delta p)^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

donc les valeurs propres de

$$J\Sigma_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \Delta(x, p) & (\Delta p)^2 \\ -(\Delta x)^2 & -\Delta(x, p) \end{bmatrix}$$

sont les nombres imaginaires purs

$$\mu = \pm i\sqrt{(\Delta p)^2(\Delta x)^2 - \Delta(x,p)^2}$$

ce qui impose

$$(\Delta p)^2(\Delta x)^2 = \Delta(x,p)^2 + \frac{\hbar^2}{4}\ ; \tag{10}$$

on retrouve en particulier l'inégalité de Heisenberg habituelle $\Delta p \Delta x \geqslant \frac{1}{2}\hbar$.

3. Relation avec la notion de capacité symplectique

Notons que notre définition d'une cellule quantique ne fait pas intervenir, au contraire de celle des cellules traditionnelles, la dimension de l'espace de phase ambiant ; la Proposition 1 montre qu'elle peut être faite en termes d'une *aire*, non d'un volume. Nous allons préciser cette observation en utilisant une notion topologique, celle de ‹‹ capacité symplectique ››, ayant précisèment la dimension d'une aire, et dont l'existence résulte du théorème de Gromov [8] sur l'impossibilité d'envoyer une boule de $\mathbb{R}^{2n}_z$ dans un cylindre basé sur un plan symplectique quelconque et de rayon plus petit (voir par exemple [3,9]). (Cette propriété nous permettra, à la fin de cet article, d'envisager une définition de ‹‹ cellules quantiques non linéaires ›› invariante par des symplectomorphismes généraux.)

Une capacité symplectique associe à chaque sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^{2n}_z$ un nombre positif ou nul, ou $+\infty$, et possède les propriétés suivantes : si $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est un symplectomorphisme alors $c(\Omega) \leqslant c(\Omega')$ (donc $c(f(\Omega)) = c(\Omega)$ pour tout symplectomorphisme, et $c(\Omega) \leqslant c(\Omega')$ si $\Omega \subset \Omega'$) ; pour tout réel λ on a $c(\lambda\Omega) = \lambda^2 c(\Omega)$; enfin :

$$c\big(B(R)\big) = c\big(Z_j(R)\big) = \pi R^2. \tag{11}$$

Soit $\mathrm{Symp}(n)$ le groupe des symplectomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}_z$. Il résulte du théorème de Gromov que la formule

$$\underline{c}(\Omega) = \sup_{f \in \mathrm{Symp}(n)} \big\{\pi R^2 \colon\ f\big(B(R)\big) \subset \Omega\big\}$$

définit une telle capacité symplectique, et que $\underline{c} \leqslant c$ pour toute autre capacité symplectique c. Remplaçant $\mathrm{Symp}(n)$ par le groupe $\mathrm{ISp}(n)$ des transformations symplectiques affines on définit de manière analogue la capacité symplectique affine $\underline{c}_{\mathrm{aff}}$:

$$\underline{c}_{\mathrm{aff}}(\Omega) = \sup_{S_\tau \in \mathrm{ISp}(n)} \big\{\pi R^2 \colon\ S_\tau\big(B(R)\big) \subset \Omega\big\}.$$

Il se trouve que si $\mathcal{B}$ est une ellipsoïde alors $\underline{c}(\Omega) = \underline{c}_{\mathrm{aff}}(\Omega)$ (voir [9]). Précisons ceci. Soit $M > 0$ et

$$\mathcal{B}_M = \{z \colon\ z^T M z \leqslant 1\}.$$

En vertu du théorème de Williamson il existe $S \in \mathrm{Sp}(n)$ et des nombres strictement positifs

$$R_1 \leqslant R_2 \leqslant \cdots \leqslant R_n \tag{12}$$

tels que

$$S^{-1}(\mathcal{B}_M):\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j^2}({x_j}^2+p_j^2)\leqslant 1\ ;$$

les nombres $1/R_j^2$ sont les modules μ_j des valeurs propres de JM. Nous appellerons *spectre symplectique* de $\mathcal{B}_M$ la suite

$$\operatorname{Spec}_\sigma(\mathcal{B}_M)=(R_1,R_2,\dots,R_n) \tag{13}$$

et on a alors

$$\underline{c}(\mathcal{B}_M)=\underline{c}_{\text{aff}}(\mathcal{B}_M)=\pi R_1^2. \tag{14}$$

Ce résultat s'étend immédiatement au cas où $\mathcal{B}$ est une ellipsoïde centrée en un point arbitraire de $\mathbb{R}_z^{2n}$.

Introduisons maintenant la notion suivante, plus générale que celle de cellule quantique :

Définition 2. Nous dirons qu'une ellipsoïde $\mathcal{B}$ est ‹‹ admissible ›› si elle contient une cellule quantique. L'intersection d'une ellipsoïde admissible par un plan symplectique passant par son centre a donc une aire au moins égale à $\frac{1}{2}h$.

La notion d'ellipsoïde admissible peut être caractérisée de façon concise en utilisant la capacité symplectique $\underline{c}$:

Proposition 2. (i) *Une ellipsoïde $\mathcal{B}$ est admissible si et seulement si $\underline{c}(\mathcal{B})\geqslant\frac{1}{2}h$* ; (ii) *lorsque l'on a égalité* : *$\underline{c}(B)=\frac{1}{2}h$, alors $\mathcal{B}$ contient une cellule quantique unique.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où toutes les ellipsoïdes sont centrées en $z_0=0$. (i) Supposons que $\mathcal{B}\supset\mathcal{B}'$ où $\mathcal{B}'=S(B(\sqrt{\hbar}))$, $S\in\operatorname{Sp}(n)$. Alors, vu l'invariance symplectique de $\underline{c}$ et la formule (11) on a

$$\underline{c}(\mathcal{B})\geqslant\underline{c}(\mathcal{B}')=\underline{c}\big(B(\sqrt{\hbar})\big)=\frac{1}{2}h.$$

Supposons réciproquement que $\underline{c}(\mathcal{B})\geqslant\frac{1}{2}h$, et soit $S\in\operatorname{Sp}(n)$ telle que $S^{-1}(\mathcal{B}_M)$ soit representée par

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j^2}(x_j^2+p_j^2)\leqslant 1\ ; \tag{15}$$

avec $R_1\leqslant R_2\leqslant\cdots\leqslant R_n$; puisque $\underline{c}(\mathcal{B})=\pi R_1^2\geqslant\frac{1}{2}h$ on doit avoir $R_j\geqslant\sqrt{\hbar}$ pour chaque j et donc $B(\sqrt{\hbar})\subset S^{-1}(\mathcal{B}_M)$, c'est à dire $S(B(\sqrt{\hbar}))\subset\mathcal{B}_M$. (ii) Supposons maintenant que $\underline{c}(\mathcal{B})=\frac{1}{2}h$, c'est à dire $R_1=\sqrt{\hbar}$. Alors $B(\sqrt{\hbar})$ est l'unique boule de rayon $\sqrt{\hbar}$ contenue dans l' ellipsoïde (15) ; il suffit donc de prouver que $S(B(\sqrt{\hbar}))=S'(B(\sqrt{\hbar}))$ si S et S' sont deux éléments distincts de $\operatorname{Sp}(n)$ tels que $S^{-1}(\mathcal{B}_M)$ et $(S')^{-1}(\mathcal{B}_M)$ soent representés par la même inégalité (15). Posons $S'=US$ et montrons que $U\in U(n)$. Évidemment U est symplectique : $U^TJU=UJU^T=J$; en outre $U^TDU=D$. Montrons que $UJ=JU$, il en résultera que $U \in U(n)$. Posons $R = D^{1/2}UD^{-1/2}$; on a $R^T R = I$ donc R est une transformation orthogonale. Elle est également symplectique : puisque J commute avec chaque puissance de D nous avons, tenant compte de la relation $JU = (U^T)^{-1}J$,

$$JR = D^{1/2}JUD^{-1/2} = D^{1/2}(U^T)^{-1}JD^{-1/2} = D^{1/2}(U^T)^{-1}D^{-1/2}J = (R^T)^{-1}J$$

donc $R \in \mathrm{Sp}(n)$; R est par conséquent une rotation symplectique d'où $JR = RJ$. Puisque $U = D^{-1/2}RD^{1/2}$ nous avons bien

$$JU = JD^{-1/2}RD^{1/2} = D^{-1/2}JRD^{1/2} = D^{-1/2}RJD^{1/2} = D^{-1/2}RD^{1/2}J = UJ$$

ce qui termine la démonstration de (ii). □

Nous reviendrons dans un moment à la notion d'ellipsoïde admissible ; appliquons tout d'abord les notions et résultats précédents aux fonctions de Wigner et de Husimi.

4. Application aux fonctions de Wigner et Husimi

Commençons par montrer que l'on peut associer à chaque cellule quantique la transformée de Wigner d'une Gaussienne. Vu la définition (1) de la transformation de Wigner on vérifie par un calcul immédiat que

$$W\Psi(z - z_0) = W\big(\widehat{T}(z_0)\Psi\big)(z)$$

où $\widehat{T}(z_0)$ est l'opérateur de Heisenberg défini par

$$\widehat{T}(z_0)\Psi(x) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(p_0x - \frac{1}{2}p_0x_0\right)\right]\Psi(x - x_0).$$

Il suffit donc d'étudier le cas $z_0 = 0$.

Soit $\mathcal{B}$ une cellule quantique centrée en $z_0 = 0$. Il existe donc $S \in \mathrm{Sp}(n)$ telle que $\mathcal{B} = S(B(\sqrt{\hbar}))$ soit déterminée par l'inégalité $|S^{-1}z| \leqslant \sqrt{\hbar}$. Posons alors $G = (S^{-1})^T S^{-1}$ et

$$W_{\mathcal{B}}(z) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\hbar}z^T Gz\right). \tag{16}$$

On a :

Proposition 3. (i) *La fonction $W_{\mathcal{B}}$ définie par* (16) *ne dépend pas du choix de S* ; (ii) *elle est la transformée de Wigner $W\Psi_{\mathcal{B}}$ de la Gaussienne*

$$\Psi_{\mathcal{B}}(x) = c\left(\frac{\det X}{(\pi\hbar)^n}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}x^T(X + iY)x\right] \tag{17}$$

où c est un nombre complexe arbitraire de module un, et $X + iY$ est donnée par la formule

$$X + iY = (L^{-1} - iP)L^{-1}$$

si $\mathcal{B} = S_0(B(\sqrt{\hbar}))$ où $S_0 = \left[\begin{smallmatrix} L & 0 \\ P & L^{-1}\end{smallmatrix}\right]$ est définie comme dans le Lemme 1.

Démonstration. (i) La fonction $W_{\mathcal{B}}$ ainsi définie ne dépend que de $\mathcal{B}$, et non du choix de $S \in \mathrm{Sp}(n)$ tel que $\mathcal{B} = S(B(\sqrt{\hbar}))$. Soient en effet S et S' tels que $S(B(\sqrt{\hbar})) = S'(B(\sqrt{\hbar}))$; alors, par linéarité et homogénéité $S^{-1}S'(B(r)) = B(r)$ pour tout $r > 0$ donc $S^{-1}S' \in \mathrm{Sp}(n) \cap O(2n)$, c'est à dire $S^{-1}S' \in U(n)$. Écrivant $S' = SU$, $U \in U(n)$ on a donc $(S'^{-1})^T S'^{-1} = (S^{-1})^T S^{-1}$ d'où $S(B(\sqrt{\hbar})) = S'(B(\sqrt{\hbar}))$. (ii) La transformée de Wigner de la fonction $\Psi_{\mathcal{B}}$ définie en (17) est donnée par (16) où

$$G = \begin{bmatrix} X + YX^{-1}Y & YX^{-1} \\ X^{-1}Y & X^{-1} \end{bmatrix}$$

(voir par exemple Littlejohn [12]). Notant que l'on peut écrire $G = (S^T)^{-1}S^{-1}$ avec

$$S = \begin{bmatrix} X^{-1/2} & 0 \\ -YX^{-1/2} & X^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n)$$

on a l'égalité

$$\begin{bmatrix} X^{-1/2} & 0 \\ -YX^{-1/2} & X^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ P & L^{-1} \end{bmatrix}$$

pour $X = L^{-2}$ et $Y = PL^{-1}$. □

Revenons maintenant à la notion de fonction de Husimi brièvement discutée dans l'introduction. Soit une cellule quantique $\mathcal{B}$, image de $B(z_0, \sqrt{\hbar})$ par $S \in \mathrm{Sp}(n)$. C'est donc l'ellipsoïde

$$\mathcal{B}: \quad (z - z_0)^T (SS^T)^{-1}(z - z_0) = \hbar.$$

De la Proposition 3 nous déduisons immédiatement :

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{B}$ une cellule quantique et $W_{\mathcal{B}} = W\Psi_{\mathcal{B}}$ la fonction de Wigner* (16) *correspondante. Pour toute Ψ on a*

$$W_{\mathrm{Husimi}} = W\Psi * W_{\mathcal{B}} \geqslant 0.$$

Démonstration. C'est évident vu l'inégalité (5) puisque $W_{\mathcal{B}} = W\Psi_{\mathcal{B}}$.

Voici une autre conséquence intéressante de cette Proposition, et de la Proposition 2 ; nous la compléterons dans la Proposition 5 :

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{B}$ une ellipsoïde admissible. Si $\underline{c}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}h$ alors on peut associer à $\mathcal{B}$ une Gaussienne* (17) *de manière canonique.*

Démonstration. Vu la Proposition 2(ii) si $\underline{c}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}h$ alors $\mathcal{B}$ contient une unique cellule quantique. Il suffit maintenat d'appliquer la Proposition 3 à cette cellule quantique. □

5. Retour sur l'interprétation statistique des cellules quantiques

Nous avons vu dans la Section 2 (cf. la formule (10)) que la notion de cellule quantique avait une interprétation statistique en conformité avec le principe d'incertitude de la mécanique quantique. Il est donc naturel de se demander quelle est l'interprétation des ellipsoïdes admissibles introduites plus haut.

Soit $M > 0$; associons lui la Gaussienne

$$W(z) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n (\det M)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} z^T M z\right). \tag{18}$$

Que W soit la transformée de Wigner d'une fonction Ψ ou non, on lui associe la ‹‹ matrice de covariance ››

$$\Sigma_{\mathcal{B}} = \frac{\hbar}{2} M^{-1} \tag{19}$$

(voir Littlejohn [12]). Vu le théorème de Williamson il existe $S \in \mathrm{Sp}(n)$ tel que

$$\Sigma = S^T \Delta_\hbar S, \quad \Delta_\hbar = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{bmatrix} \tag{20}$$

où $\Lambda = \mathrm{diag}[\mu_1, \ldots, \mu_n]$, les $\pm i\mu_j$, $\mu_j > 0$ étant comme auparavant les valeurs propres de JM. Nous rangerons, par convention, les μ_j en ordre décroissant :

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n > 0 \tag{21}$$

ce qui est conforme avec la convention (12) pour le spectre symplectique des ellipsoïdes.

Nous allons montrer dans la Proposition 4 ci-dessous que l'on peut voir si l'ellipsoïde

$$\mathcal{B}: \quad z^T M z \leqslant \hbar$$

est admissible par simple inspection de $\Delta_\hbar$. Nous verrons aussi que si $\mathcal{B}'$: $z^T M' z \leqslant \hbar$ contient $\mathcal{B}$ alors les valeurs propres de la matrice de covariance de $\mathcal{B}'$ seront supérieures à celles de $\mathcal{B}$. Aussi intuitivement ‹‹ évidente ›› que cette propriété puisse paraître, nous verrons que sa démonstration n'est quand même pas tout à fait triviale, car elle nous oblige à utiliser le Lemme 2 ci-dessous, qui est équivalent au théorème de Gromov dans le cas linéaire ! (Nous en donnons une démonstration relativement élémentaire en appendice) :

Lemme 2. *Soient $M, M' > 0$ et $\pm i\mu_j$, $\pm i\mu'_j$ les valeurs propres de JM et JM', respectivement* ($\mu_j > 0$, $\mu'_j > 0$). *Ordonnant les suites $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(\mu'_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de façon qu'elles soient simultanèment croissantes où décroisantes, on a alors l'implication suivante* :

$$M \leqslant M' \quad \Longrightarrow \quad -\mu_j^2 \leqslant -\mu_j'^2$$

que nous écrirons symboliquement $(JM)^2 \leqslant (JM')^2$.

Remarque. Ce lemme est la version ‹‹ symplectique ›› d'un résultat classique de la théorie de l'optimisation convexe (théorie de Rayleigh–Courant–Fisher, voir le texte d'Arnol'd [1, §24]). Il implique (et est en fait équivalent à) la propriété

$$\mathcal{B}_{M'} \subset \mathcal{B}_M \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Spec}_\sigma(\mathcal{B}_{M'}) \leqslant \mathrm{Spec}_\sigma(\mathcal{B}_M). \tag{22}$$

Puisque le spectre symplectique est un invariant symplectique, cette propriété reste vraie si l'on remplace $\mathcal{B}_{M'}$ par $S(\mathcal{B}_{M'})$, $S \in \mathrm{Sp}(n)$. On en déduit aussitôt le théorème de Gromov dans le cas linéaire : si $S \in \mathrm{Sp}(n)$ envoie la boule $B(R')$ dans le cylindre $Z_j(R)$: $x_j^2 + p_j^2 \leqslant R^2$, alors $R' \leqslant R$. (La généralisation au cas affine est évidente, et laissée au lecteur.)

Proposition 4. (i) *L'ellipsoïde* $\mathcal{B}$: $z^T Mz \leqslant \hbar$ *est admissible si et seulement si* $\Delta_\hbar$ *définie par* (20) *est telle que*

$$\Delta_\hbar \geqslant \frac{\hbar}{2} I_{2n\times 2n}\ ; \tag{23}$$

cette propriété est équivalente à : (ii) *la matrice hermitienne*

$$\Sigma + \frac{i\hbar}{2} J \text{ est semi-définie positive}\ ; \tag{24}$$

(iii) *Si* $\mathcal{B}'$: $z^T M' z \leqslant \hbar$ *est une autre ellipsoïde, alors*

$$S(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}',\ S \in \mathrm{Sp}(n) \text{ implique } \Delta_\hbar \leqslant \Delta'_\hbar \tag{25}$$

où $\Delta_\hbar$ *et* $\Delta'_\hbar$ *sont définis par* (20).

Démonstration. Preuve de (i) et (ii). Vu la définition (19) la condition (24) s'écrit

$$M^{-1} + iJ \text{ est semi-définie positive.}$$

Écrivons une diagonalisation de Williamson pour la matrice M :

$$M = S^T DS, \quad S \in \mathrm{Sp}(n), D = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$$

où $\Lambda = \mathrm{diag}[\mu_1, \ldots, \mu_n]$ les $\pm i\mu_j$ étant les valeurs propres de JM. Puisque $S^T JS = J$ la condition (24) s'écrit maintenant

$$D^{-1} + iJ \text{ est semi-définie positive.}$$

Un calcul facile montre que le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de $D^{-1} + iJ$ est le produit des n facteurs

$$P_j(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{\mu_j}\lambda + \frac{1}{\mu_j^2} - 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

et les zéros $\lambda_j = \pm 1 + (1/\mu_j)$ de $P(\lambda)$ sont donc tous positifs ou nuls si et seulement si $\mu_j \leqslant 1$ pour tout j. Or $\mu_j = 1/R_j^2$ où $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ est le spectre symplectique de l'ellipsoïde $\mathcal{B}_1$: $z^T Mz \leqslant 1$ qui a donc pour capacité symplectique $\underline{c}(\mathcal{B}_1) = \pi R_1^2 \geqslant \pi$; puisque $\mathcal{B} = \sqrt{\hbar}\mathcal{B}_1$ on a

$$\underline{c}(\mathcal{B}) = (\sqrt{\hbar}\,)^2 \underline{c}(\mathcal{B}_1) \geqslant \frac{1}{2} h.$$

Or, vu la Proposition 2(i), cette dernière relation est elle-même équivalente à la condition ‹‹ $\mathcal{B}$ *est admissible* ››. *Preuve de* (iii). Supposons d'abord $S = I$. L'inclusion $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ implique alors $M \geqslant M'$ et donc aussi $(JM)^2 \geqslant (JM')^2$ vu le Lemme 2 ci-dessus. Soient $\pm i\mu_j$ les valeurs propres de JM et $\pm i\mu'_j$ celles de JM'. Par définition de la matrice de covariance, il suffit de montrer que $\mu'_j \leqslant \mu_j$ (rappellons la convention (21)). Or les valeurs propres de $(JM)^2$ (respectivement $(JM')^2$) sont les nombres $-\mu_j^2$ (resp. $-\mu_j'^2$)

donc $(JM)^2 \leqslant (JM')^2$ implique $-\mu_j^2 \leqslant -\mu_j'^2$, c'est à dire $\mu_j^2 \geqslant \mu_j'^2$ prouvant l'implication (25) lorsque S est l'identité. Dans le cas général il suffit de remarquer que $S(\mathcal{B})$ est définie par l'inégalité

$$z^T(SMS^T)^{-1}z \leqslant \hbar$$

et que les valeurs propres de JM^{-1} et de $JSMS^T$ sont les mêmes : en effet, S étant symplectique, $JS = (S^{-1})^T J$ et donc

$$JSMS^T = (S^{-1})^T JMS^T \simeq JM.$$

Remarque. Vu la définition (20) de la matrice de covariance, la condition (23) s'énonce aussi : les valeurs propres de D sont inférieures ou égales à un (D étant la diagonalisée de M définie par le théorème de Williamsom).

Illustrons les résultats ci-dessus par un exemple. Soit $n = 1$ et prenons pour Σ la matrice de covariance (9). On a alors

$$\Sigma + \frac{i\hbar}{2}J = \begin{bmatrix} (\Delta x)^2 & \Delta(x,p) + \frac{i\hbar}{2} \\ \Delta(x,p) - \frac{i\hbar}{2} & (\Delta p)^2 \end{bmatrix}$$

et la condition (24) est dans ce cas équivalente à

$$\det\left(\Sigma + \frac{i\hbar}{2}J\right) \geqslant 0$$

c'est à dire à

$$(\Delta p)^2(\Delta x)^2 \geqslant \Delta(x,p)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \tag{26}$$

ce qui généralise (10).

Remarque. La formule (26) est une forme présise de l'inégalité de Heisenberg habituelle $\Delta p \Delta x \geqslant \frac{1}{2}\hbar$. Elle remonte aux travaux de Schrödinger, et a été redécouverte par les physiciens travaillant en optique quantique (voir par exemple [5]). Notons par ailleurs que la condition (24) est nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_{\mathcal{B}}$ soit la matrice de covariance d'un état quantique (pur où mixte) : voir Simon et al. [13] ; aussi Arvind et al. [2] pour une revue de ce résultat.

Nous avons mentionné dans l'Introduction que la convolée $W\Psi * W\Phi$ de deux transformées de Wigner n'est pas en général la transformée de Wigner d'une fonction. Toutefois :

Proposition 5. *Soit une cellule quantique $\mathcal{B}$ et $\Psi_{\mathcal{B}}$ la Gaussienne* (17) *associée via* (16). *Alors, pour toute Gaussienne réelle Ψ la convolée $W\Psi * W\Psi_{\mathcal{B}}$ est la transformée de Wigner d'une Gaussienne associée à une ellipsoïde admissible.*

Démonstration. Écrivons

$$W\Psi_{\mathcal{B}}(z) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\hbar}z^T G z\right),$$

$$W\Psi(z) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n (\det M)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}z^T M z\right)$$

ainsi que $W(z) = W\Psi * W\Psi_{\mathcal{B}}(z)$. On a

$$W(z) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{2n} (\det M)^{1/2} \int e^{-\frac{1}{\hbar}(z-z')^T M(z-z')} e^{-\frac{1}{\hbar}z'^T Gz'}\, d^{2n}z'.$$

Soit $S \in \mathrm{Sp}(n)$ tel que $G = (SS^T)^{-1}$ et posons $z'' = S^{-1}z'$; alors

$$W(Sz) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{2n} (\det M)^{1/2} \int e^{-\frac{1}{\hbar}(z-z'')^T S^T MS(z-z'')} e^{-\frac{1}{\hbar}|z''|^2}\, d^{2n}z''.$$

Remplaçant au besoin S par une autre matrice symplectique, on peut supposer (théorème de Williamson) que

$$S^T MS = D = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$$

donc

$$W(Sz) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{2n} (\det M)^{1/2} \int e^{-\frac{1}{\hbar}(z-z'')^T D(z-z'')} e^{-\frac{1}{\hbar}|z''|^2}\, d^{2n}z''.$$

La matrice D étant diagonale cette dernière intégrale se calcule aisèment, et on trouve

$$W(Sz) = \exp\left[-\frac{1}{\hbar} z^T D(I + D)^{-1} z\right]$$

c'est à dire

$$W(z) = \exp\left[-\frac{1}{\hbar} z^T (S^{-1})^T D(I + D)^{-1} S^{-1} z\right].$$

Posons

$$M' = (S^{-1})^T D(I + D)^{-1} S^{-1}\ ;$$

vu la remarque suivanr la démonsration de la Proposition 4, l'ellipsoïde $\mathcal{B}'$: $z^T M'z \leqslant \hbar$ est admissible si et seulement si les valeurs propres de $D(I + D)^{-1}$ sont inférieures ou égales à un ; ceci est trivialement le cas, ce qui démontre la proposition.

Ce résultat se généralise sans difficulté au cas de Gaussiennes quelconques (c'est à dire non nécéssairement réelles). Il serait intéressant d'étudier la situation où $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^n_x)$ est une fonction quelconque ; nous ne le ferons pas ici.

6. Généralisations possibles

La définition de cellule quantique introduite dans cet Article est essentiellement linéaire puisqu'elle est donnée en termes du groupe $\mathrm{ISp}(n)$. Une généralisation évidente est de considérer des cellules quantiques plus générales, images de la boule $B(\sqrt{\hbar})$ par des symplectomorphismes quelconques. La Proposition 1 n'est évidemment plus vraie pour de tels objets. On a toutefois la propriété plus faible suivante :

Proposition 6. *Soit* $f \in \mathrm{Symp}(n)$ *et un plan conjugué* $\mathcal{P}$; *soit* $\mathcal{C}$ *la projection orthogonale de* $f(B(\sqrt{\hbar}))$ *sur* $\mathcal{P}$. *T oute ellipse de* $\mathcal{P}$ *contenant* $\mathcal{C}$ *a une aire* $\geqslant \frac{1}{2}h$.

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ un plan symplectique et $\mathcal{C}$ la projection de $f(B(\sqrt{\hbar}))$ sur $\mathcal{P}$. Composant si besoin f avec un élément de $\mathrm{Sp}(n)$ on peut supposer que $\mathcal{P}$ est le plan des coordonnées x_1, p_1. Supposons qu'il existe une ellipse de ce plan, d'aire inférieure à $\frac{1}{2}h$ et contenant. Soit $S_{\tau,1}$ une application affine de $\mathcal{P}$ transformant cette ellipse en un cercle de même aire et définissons $S_\tau \in \mathrm{ISp}(n)$ par

$$S_\tau(x,p) = (x',p'), \quad (x_1',p_1') = S_{\tau,1}(x_1,p_1).$$

La restriction de S_τ à $\mathcal{P}$ est $S_{\tau,1}$ et donc $S_\tau(f(B(\sqrt{\hbar})))$ est contenu dans un cylindre basé sur $\mathcal{P}$ et de rayon inférieur à $\sqrt{\hbar}$, contredisant le théorème de Gromov. □

Remarque. La démonstration de cette proposition montre que l'on peut remplacer dans son énoncé les ellipses par des surfaces quelconques difféomorphes à un disque et contenant $\mathcal{C}$.

Une autre généralisation consiste à considérer des cellules non compactes. Rappellons que nous avons montré dans la Proposition 2(i) qu'une ellipsoïde $\mathcal{B}$ est admissible si et seulement si $\underline{c}(\mathcal{B}) \geqslant \frac{1}{2}h$. Ceci suggère de définir un ‹‹ ensemble admissible ›› comme étant tout sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}_z^{2n}$ tel que $\underline{c}(\Omega) \geqslant \frac{1}{2}h$. Vu le théorème de Gromov un cylindre symplectique $Z_j(R)$: $x_j^2 + p_j^2 \leqslant R^2$ est alors un ensemble admissible dès que $R \geqslant \sqrt{\hbar}$; plus généralement, d'ailleurs : si

$$B(\sqrt{\hbar}) \subset \Omega \subset Z_j(R) \quad \text{et} \quad R \geqslant \hbar$$

alors Ω est admissible. L'avantage de ce point de vue est qu'il permet de considérer les images par transformation symplectiques des ‹‹ ellipses dégénérées ›› du type

$$\sum_{j=1}^{k} x_j^2 + p_j^2 \leqslant \hbar \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

comme des cellules quantiques.

Annexe A. Démonstration du Lemme 2

(Nous suivons ici d'assez prés un argument original de Giedke et al. [5].) Il s'agit donc de montrer que si les valeurs propres de M sont inférieures à celles de M', alors les valeurs propres de $(JM)^2$ sont inférieures (ou égales) à celles de $(JM')^2$. La relation $M \leqslant M'$ est équivalente à l'inégalité $z^T Mz \leqslant z^T M'z$ pour tout $z \in \mathbb{R}_z^{2n}$. Remplaçant z par $(JM^{1/2})z$ on a donc

$$z^T (JM^{1/2})^T M'(JM^{1/2})z \leqslant z^T (JM^{1/2})^T M(JM^{1/2})z$$

c'est à dire

$$M^{1/2}JMJM^{1/2} \leqslant M^{1/2}JM'JM^{1/2} \tag{A.1}$$

où on a utilisé le fait que $J^T = -J$. (On observera que ls deux termes de cette ‹‹ inégalité ›› sont bien symétriques définies positives). Similairement, remplaçant z par $(JM'^{1/2})z$ dans $z^T M'z \leqslant z^T Mz$ on obtient

$$M'^{1/2} JMJM'^{1/2} \leqslant M'^{1/2} JM'JM'^{1/2}. \tag{A.2}$$

Notant que l'on a

$$M^{1/2} JM'JM^{1/2} \simeq MJM'J,$$
$$M'^{1/2} JMJM'^{1/2} \simeq M'JMJ \simeq MJM'J$$

nous pouvons réécrire (A.1) et (A.2) comme, respectivement,

$$M^{1/2} JMJM^{1/2} \leqslant MJM'J$$

et

$$MJM'J \leqslant M'^{1/2} JM'JM'^{1/2}$$

et on a donc

$$M^{1/2} JMJM^{1/2} \leqslant M'^{1/2} JM'JM'^{1/2}.$$

Puisque par ailleurs

$$M^{1/2} JMJM^{1/2} \simeq (MJ)^2, \qquad M'^{1/2} JM'JM'^{1/2} \simeq (M'J)^2$$

nous obtenons finalement la relation annoncée $(MJ)^2 \leqslant (M'J)^2$.

Références

[1] V.I. Arnol'd, Mathematical Methods of Classical Mechanics, second ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1989.

[2] Arvind, B. Dutta, N. Mukunda, R. Simon, The real symplectic groups in quantum mechanics and optics, e-print quant-ph/9509002, v3 (1995).

[3] I. Ekeland, H. Hofer, Symplectic topology and Hamiltonian dynamics, I and II, Math. Zeit. 200 (1990) 355–378 ; 203, 553–567.

[4] G.B. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[5] G. Giedke, J. Eisert, J.I. Cirac, M.B. Plenio, Entanglement transformations of pure Gaussian states, e-print quant-ph/0301038, v1 (2003).

[6] N.G. de Bruijn, in : O. Shisha (Ed.), Inequalities, Academic Press, New York, 1967, pp. 55–71.

[7] M. de Gosson, Phase space quantization and the uncertainty principle, Phys. Lett. A 317 (5–6) (2003).

[8] M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. 82 (1985) 307–347.

[9] H. Hofer, E. Zehnder, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics, Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, 1994.

[10] K. Husimi, Some formal properties of the density matrix, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 22 (1940) 264.

[11] R.L. Hudson, When is the Wigner quasi-probability density non-negative ?, Rep. Math. Phys. 6 (1974) 249–252.

[12] R.G. Littlejohn, The semiclassical evolution of wave packets, Physics Reports 138 (4–5) (1986) 193–291, (Review section of Physics Letters).

[13] R. Simon, E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda, Gaussian–Wigner distributions in quantum mechanics and optics, Phys. Rev. A 36 (8) (1987) 3868–3880.

[14] J. Williamson, On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems, Amer. J. Math. 58 (1963) 141–163.